

# **DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES Y SU DISEÑO EN SISTEMAS MULTIVARIABLES**

FELIPE OSORIO ARTEAGA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PEREIRA/RISARALDA  
2018

# **DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES Y SU DISEÑO EN SISTEMAS MULTIVARIABLES**

FELIPE OSORIO ARTEAGA

Proyecto de grado para optar por el título de Ingeniero Electricista

Director:  
Didier Giraldo Buitrago

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PEREIRA/RISARALDA  
2018



# Agradecimientos

Agradezco a mis padres por que gracias a su dedicación y esfuerzo he logrado esta meta; a mi director por su guía y esfuerzo para llevar a cabo este trabajo; a los docentes del programa de Ingeniería Eléctrica por su aporte académico y propio durante toda mi formación académica y demás personas de las cuales obtuve siempre un buen apoyo para terminar mi carrera.

# Contenido

<b>1. Sistemas de estructura variable</b>	<b>3</b>
<b>2. Control por planos deslizantes</b>	<b>4</b>
2.1. Descripción matemática . . . . .	4
2.1.1. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad . . . . .	5
2.1.2. Dinámica del plano deslizante . . . . .	7
2.2. Robustez ante perturbaciones . . . . .	12
2.3. Elección del plano deslizante . . . . .	13
2.4. Inconvenientes . . . . .	13
2.5. Descripción para sistemas multivariantes . . . . .	14
<b>3. Diseño del controlador por planos deslizantes</b>	<b>16</b>
3.1. Sistemas escalares . . . . .	16
3.2. Sistemas multivariantes . . . . .	27
<b>4. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>5. Bibliografía</b>	<b>35</b>

# Figuras

2.1. Campo vectorial $f$ apuntando hacia la superficie de conmutación . . . . .	5
2.2. Condición de transversalidad . . . . .	6
2.3. Método de Filippov . . . . .	7
2.4. Vector velocidad . . . . .	8
2.5. Control Equivalente . . . . .	9
2.6. Diagrama de bloques . . . . .	10
2.7. Funciones $\text{sat}(x)$ , $\tanh(x)$ y $\text{sign}(x)$ . . . . .	14
3.1. Sistema telescopio . . . . .	17
3.2. Sistema telescopio usando Simulink . . . . .	19
3.3. Respuesta y señal de control sistema telescopio . . . . .	20
3.4. Planos de fase del sistema telescopio . . . . .	20
3.5. Señal de control y respuesta del sistema telescopio con disminución del <i>chattering</i> . . . . .	21
3.6. Señal de control y respuesta del sistema telescopio ante una señal de referencia de $r(t) > 1$ . . . . .	22
3.7. Sistema telescopio usando Simulink . . . . .	23
3.8. Planos de fase del sistema telescopio . . . . .	24
3.9. Sistema telescopio usando Simulink . . . . .	25
3.10. Plano de fase y señales de control y salida del sistema telescopio . . . . .	26
3.11. Señal de control y respuesta del sistema telescopio ante una señal de referencia $r(t) = 1$ con perturbaciones. . . . .	26
3.12. Tanque agitador . . . . .	29
3.13. Tanque agitador usando Simulink . . . . .	31
3.14. Respuestas del tanque agitador ante diferentes señales de referencia . . . . .	32
3.15. Respuestas del tanque agitador ante diferentes señales de referencia y perturbaciones . . . . .	33

# Capítulo 1

## Sistemas de estructura variable

Así como existen sistemas físicos descritos con ecuaciones diferenciales continuas, existen aquellos que son descritos por ecuaciones diferenciales discontinuas. A estos sistemas se les conoce como sistemas de estructura variable o sistemas con lado derecho discontinuo.

Estos sistemas son un conjunto de subsistemas continuos que existen para determinados estados del sistema, con una lógica que permite la conmutación entre ellos; la ventaja de esta estructura es la combinación de las características útiles de cada subsistema o la obtención de nuevas, producto de esa combinación. Como ejemplo de estos sistemas tenemos circuitos eléctricos con componentes electrónicos, tales como convertidores o fuentes conmutadas. [1]

El control de estructura variable se presenta al diseñar cada uno de los subsistemas y su lógica de conmutación, logrando un sistema de estructura variable con un comportamiento deseado. Si se plantea el objetivo de control en función de los estados del sistema y una función discontinua que lleve los estados del sistema hacia esa función, se obtiene el control por plano deslizante. La función objetivo de control es lo que se conoce como superficie de conmutación, sobre la cual se deslizan y mantienen los estados del sistema. La principal ventaja de este control es la invarianza ante perturbaciones externas y paramétricas del sistema físico, lo que hace que sea bastante robusto y llamativo para ser aplicado.

# Capítulo 2

## Control por planos deslizantes

En los años 1950, en la antigua Unión Soviética, se desarrolló el control por estructura variable con plano deslizante, el cual fue propuesto inicialmente para sistemas de segundo orden. Desde ese entonces, esta técnica se ha desarrollado para muchos tipos de sistemas, tales como sistemas no lineales, escalares y multivariables, sistemas estocásticos y de optimización; que junto al avance tecnológico ha facilitado su implementación en sistemas continuos y discretos. [2]

A continuación se presenta la descripción matemática del control por planos deslizantes, vista desde la geometría diferencial.

### 2.1. Descripción matemática

Considere un sistema escalar, invariante con el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $u$  la función de control.

Se define entonces una función de las variables de estado del sistema, llamada superficie de conmutación, y una función de control escalar y discontinua, dependiente de la superficie de conmutación:

$$S = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\}\tag{2.2}$$

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}\tag{2.3}$$

De tal manera que el campo vectorial apunte o se dirija hacia la superficie de deslizamiento (ver Figura 2.1).

$$\dot{x} = \begin{cases} f(x, u^+) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ f(x, u^-) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}\tag{2.4}$$



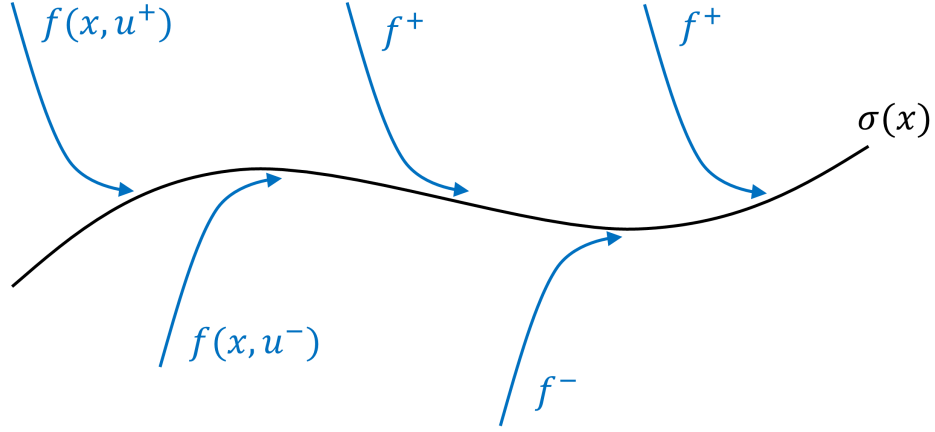


Figura 2.1: Campo vectorial  $f$  apuntando hacia la superficie de conmutación

Para asegurar esto, en el límite de la función de conmutación, si esta es positiva debe decrecer y si esta es negativa debe crecer; permitiendo una vez alcanzada la superficie, permanecer en ella.

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{\sigma}(x) < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \dot{\sigma}(x) > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Esta condición se define como la condición de existencia del modo deslizante, debido a que comprueba que si el campo vectorial  $f$  se dirige hacia  $\sigma(x)$ , en el límite de la función de conmutación, este campo  $f$ , permanezca en la variedad. Esta condición garantiza un régimen deslizante de  $f$  sobre la superficie  $\sigma(x)$ . También se puede escribir como:

$$\dot{\sigma}(x)\sigma(x) < 0 \quad (2.6)$$

Se conoce como condición de alcanzabilidad.

### 2.1.1. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad

Existen unas condiciones de existencia, invarianza y transversalidad que serán interpretadas geométricamente, por lo que se utilizará el concepto de derivada direccional. La derivada direccional es una función escalar que indica la razón de cambio de un campo escalar en dirección de un campo vectorial. Con esto expresaremos la derivada de la función de conmutación como la derivada direccional en  $f$ .

$$\dot{\sigma}(x) = \nabla\sigma(x) \cdot f(x, u) \quad (2.7)$$

Con esto se puede expresar la condición de existencia del modo deslizante como:

$$\dot{\sigma}(x) = \begin{cases} \nabla\sigma(x) \cdot f(x, u^+) < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \nabla\sigma(x) \cdot f(x, u^-) > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Si se considera un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Aplicando la condición de existencia:

$$\dot{\sigma}(x) = \begin{cases} \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u^+ < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u^- > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}\tag{2.10}$$

Se puede observar que un régimen deslizante sobre la superficie de conmutación, solo es posible si:

$$\nabla\sigma(x) \cdot g(x) \neq 0\tag{2.11}$$

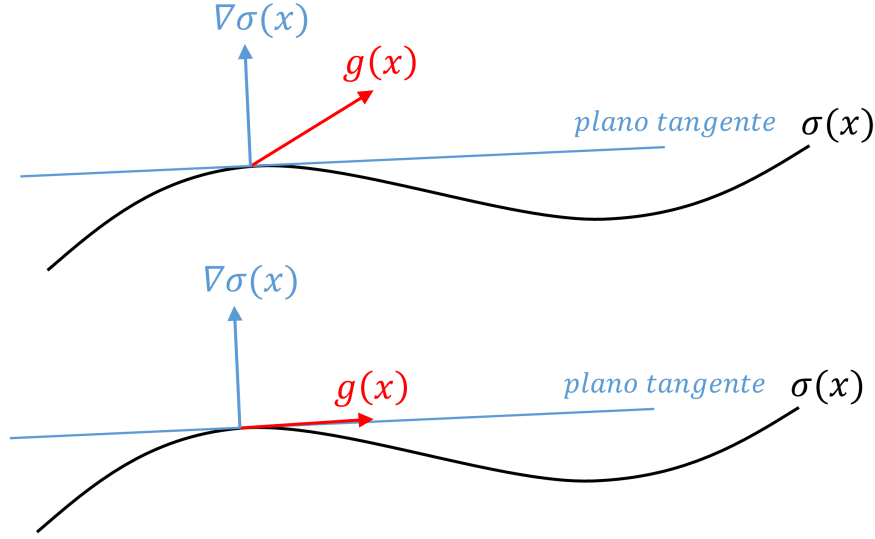


Figura 2.2: Condición de transversalidad

A esta condición se conoce como condición de transversalidad, la cual indica que el gradiente de  $\sigma(x)$  no puede ser ortogonal a  $g$ , ya que si esto ocurre no se puede forzar a  $f$  a permanecer en la superficie de conmutación (ver Figura 2.2). Esto permite entender que los valores que toma la función de control  $u^+$  y  $u^-$  son diferentes.

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^-\tag{2.12}$$

Suponiendo  $u^+ > u^-$ , restando las 2 expresiones de la condición de existencia para el sistema 2.9, podemos complementar la condición de transversalidad así:

$$\nabla\sigma(x) \cdot g(x) (u^+ - u^-) < 0 \quad \nabla\sigma(x) \cdot g(x) < 0\tag{2.13}$$

Garantizando con la elección correcta de la función de conmutación y la condición de transversalidad, el régimen deslizante sobre  $\sigma(x)$ .

## 2.1.2. Dinámica del plano deslizante

Debido a que la función de control es discontinua, no se puede describir convencionalmente el modo deslizante, ya que no satisface las condiciones de existencia y unicidad. Esto conlleva a regularizar el problema. Regularizar es el proceso que permite trabajar el sistema con un modelo equivalente que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad, y que entregue resultados esperados para el sistema original. Los métodos de Filippov y del control equivalente permiten regularizar el sistema.

### 2.1.2.1. Método de Filippov

El método de Filippov define una franja límite ( $\Delta$ ) alrededor de la superficie de deslizamiento lo suficientemente pequeña, donde en un intervalo de tiempo corto, los campos vectoriales  $f^+$  y  $f^-$  debidos a la función de control discontinua, son constantes en algún punto del plano deslizante  $\sigma(x)$ , como se observa en la Figura 2.3.

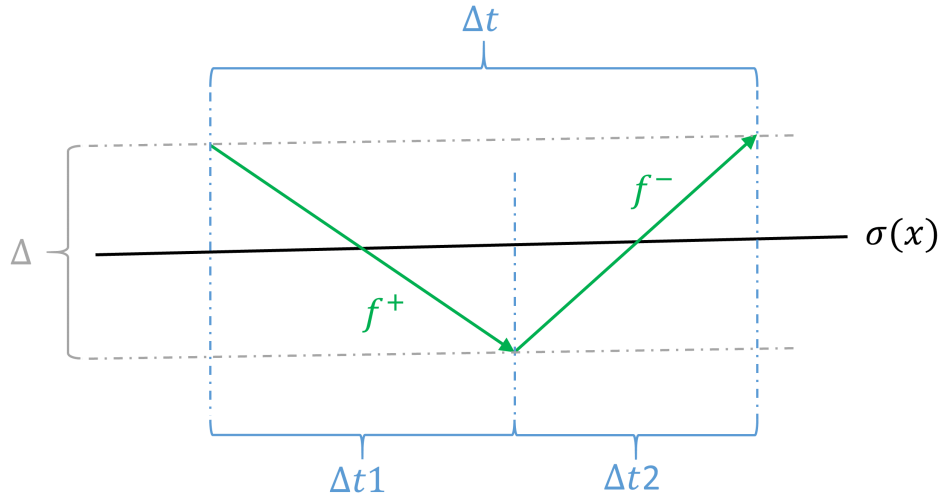


Figura 2.3: Método de Filippov

Dividiendo el intervalo de tiempo considerando que en una parte actúa  $f^+$  y en otra parte  $f^-$ , el promedio de velocidad de los estados (vector velocidad) será:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &\Rightarrow f^+ & \Delta t_2 &\Rightarrow f^- \\ \dot{x} = F = \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \mu f^+ + (1 - \mu) f^- & \text{donde } \mu &= \frac{\Delta t_1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Siendo este el campo de velocidad de los estados en modo deslizante. El valor  $\mu$  regula que para cualquier punto sobre la superficie de discontinuidad, el campo de velocidad de los estados sea tangente a la superficie en ese punto, por lo que la derivada de la función de conmutación es igual a cero (ver Figura 2.4). De ahí se puede obtener el valor de  $\mu$  así:

$$\mu = - \frac{\nabla \sigma(x) f^-}{\nabla \sigma(x) f^+ - f^-} \quad (2.15)$$

Este método no considera el deslizamiento solo en la variedad, sino en un pequeño espacio cerca de ella ( $\Delta$ ), por lo que describe un régimen deslizante real. Al considerar ese espacio, muestra que con estar muy cerca a la superficie de conmutación se puede considerar el modo deslizante, lo cual sucede en los sistemas físicos a causa de retardos, pequeñas constantes de tiempo, perturbaciones y otros fenómenos como la histéresis.

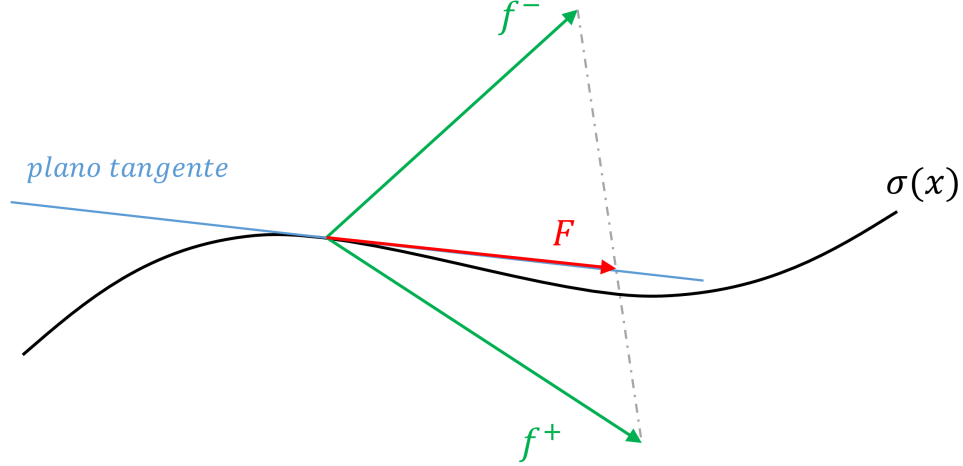


Figura 2.4: Vector velocidad

#### 2.1.2.2. Control equivalente

El método de control equivalente propone cambiar la ley de control discontinua por una suave que cumpla las siguientes condiciones de invarianza:

$$\sigma(x) = 0 \quad \dot{\sigma}(x) = \nabla\sigma(x) \cdot f(x, u_{eq}) = 0 \quad (2.16)$$

Estas condiciones buscan lo mismo del método de Filippov, llevar el campo de velocidad de los estados a la función de conmutación, garantizando que este se quede en la superficie de discontinuidad. Entonces las condiciones de invarianza describen el régimen deslizante ideal.

Considerando el sistema 2.9, se tiene que:

$$\sigma(x) = 0 \quad \dot{\sigma}(x) = \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u_{eq} \quad (2.17)$$

La función de control suave se despeja de la segunda ecuación:

$$u_{eq} = -\frac{\nabla\sigma(x) \cdot f(x)}{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)} \quad (2.18)$$

El control equivalente  $u_{eq}$ , que se define a partir de la condición de transversalidad, sólo es válido sobre la superficie de conmutación. El control equivalente se puede ver como el valor promedio de la conmutación entre  $u^+$  y  $u^-$  a frecuencias altas.

Reemplazando el control equivalente en el sistema lineal se obtiene la dinámica de deslizamiento ideal.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} = f(x) - g(x) \frac{\nabla\sigma(x) \cdot f(x)}{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)} \quad (2.19)$$

$$\dot{x} = F = \left[ I - g(x) (\nabla\sigma(x) \cdot g(x))^{-1} \nabla\sigma(x) \right] f(x) = \Phi(x) f(x)$$

Donde  $\Phi(x)$  es un campo que proyecta el sistema  $f(x)$  sobre la superficie de deslizamiento, por lo que asegura la existencia del régimen deslizante.

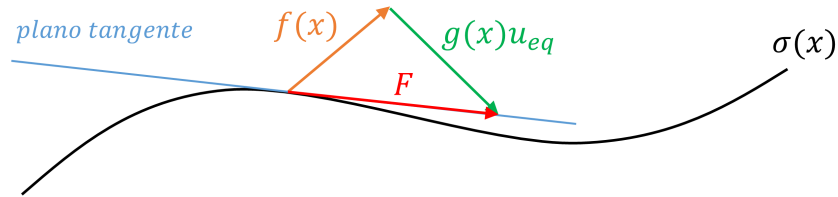


Figura 2.5: Control Equivalente

La cual es válida sólo en la superficie de conmutación y describe el modo deslizante ideal. En la Figura 2.5 se puede ver el cumplimiento del régimen de deslizamiento en algún punto sobre  $\sigma(x)$  [3]. Como ejemplo se mirarán cada una de las condiciones que permiten el modo deslizante en un sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

Con la función de control discontinua y la siguiente función de conmutación:

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ u^- & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^-$$

$$\sigma(x) = r - k^T x$$

Identificando:

$$f(x) = Ax \quad g(x) = b \quad \nabla\sigma(x) = -k^T$$

Se analiza la condición de existencia:

$$\dot{\sigma}(x) = \begin{cases} \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u^+ < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u^- > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

$$\dot{\sigma}(x) = \begin{cases} -k^T Ax - k^T b u^+ < 0 & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ -k^T Ax - k^T b u^- > 0 & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

Condición de transversalidad:

$$\nabla\sigma(x)g(x) < 0 \quad -k^T b < 0$$

Control equivalente:

$$u_{eq} = -\frac{\nabla\sigma(x) \cdot f(x)}{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)} \quad u_{eq} = -\frac{k^T Ax}{k^T b}$$

Dinámica de deslizamiento ideal:

$$\dot{x} = \left( I - g(x) (\nabla\sigma(x) \cdot g(x))^{-1} \nabla\sigma(x) \right) f(x)$$

$$\dot{x} = \left( I - b (k^T b)^{-1} (-k^T) \right) Ax \quad \dot{x} = A_{PD}x$$

En la Figura 2.6 se muestra un diagrama de bloques del control por planos deslizante para el sistema 2.32.

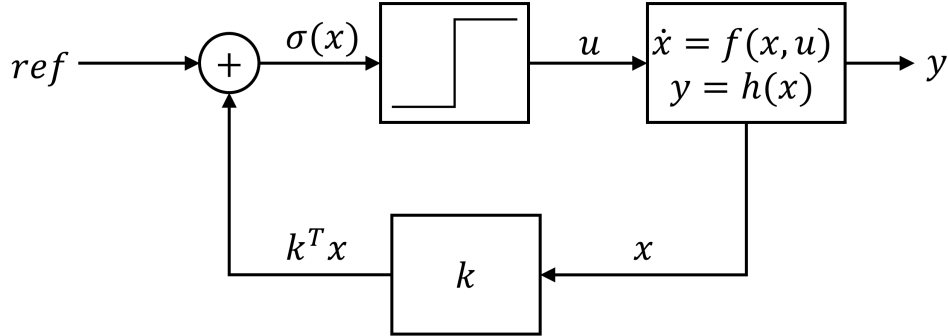


Figura 2.6: Diagrama de bloques

Se puede definir también la técnica de control por planos deslizantes a través de la función de Lyapunov, verificando además el cumplimiento de estabilidad. Se define una función  $V(x)$ , llamada función de Lyapunov, tal que si cumple las siguientes condiciones:

$$V(\bar{x}) = 0 \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{x} \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \bar{x} \quad (2.20)$$

El sistema  $y = f(x)$  es asintóticamente estable en el punto  $\bar{x}$ . Se escoge la siguiente función de Lyapunov, tal que cumpla la primera y segunda condición.

$$V(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2} \quad (2.21)$$

Se evalúa entonces la tercera condición, derivando la función de Lyapunov. Nótese que corresponde a la condición de alcanzabilidad.

$$\dot{V}(x) = \sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0 \quad (2.22)$$

Evaluando la condición con el sistema del ejemplo

$$\sigma(x)(-k^T Ax - k^T b u) < 0$$

Se requiere entonces una función  $u$ , tal que cumpla esta condición. Como  $\sigma(x)$  puede ser positivo o negativo, se necesita asegurar el signo contrario para  $\dot{\sigma}(x)$ , por lo que la función signo es perfecta para esta tarea.

$$u = k_u \text{sign}(\sigma(x)) \quad \sigma(x)(-k^T Ax - k^T b k_u \text{sign}(\sigma(x))) < 0$$

Si  $k_u$  es lo suficientemente grande, el signo de  $\dot{\sigma}(x)$  va a estar marcado por la señal de control. Si  $\sigma(x)$  es positiva, el valor de la función signo es 1, por lo que  $\dot{\sigma}(x)$  será negativa; si  $\sigma(x)$  es negativa, el valor de la función signo es -1, por lo que  $\dot{\sigma}(x)$  será positiva.

$$\sigma(x)(-k_u \text{sign}(\sigma(x))) < 0$$

Esto conduce a que se cumple la tercera condición, por lo que el sistema es asintóticamente estable en el punto  $\bar{x}$  [4]. Como el plano deslizante es de la forma:

$$\sigma(x) = r - k^T x \quad (2.23)$$

El punto  $\bar{x}$  para el cual el sistema es asintóticamente estable estará definido por el valor de la señal de referencia  $r$ . Se puede entonces tener una función de control compuesta por el control equivalente, el cuál actúa en la cercanía de la función de conmutación y asegura el régimen deslizante, y el control discontinuo, el cual lleva las variables de estado a las cercanías de la superficie de deslizamiento.

Esta composición debe realizarse con cuidado, debido a la forma de actuar de cada señal del control. Se pueden sumar las 2 simplemente, depender la función discontinua del valor absoluto del plano deslizante para disminuir las oscilaciones al acercarse al plano, así como también depender la función continua de la magnitud del plano para asegurar su operación en la región cercana al plano.

## 2.2. Robustez ante perturbaciones

Una propiedad importante de los planos deslizantes es la insensibilidad a las perturbaciones externas y paramétricas. Como estas se presentan en diferentes partes del sistema físico y del sistema de control, se analizará de nuevo las condiciones de control por planos deslizantes con perturbaciones externas y paramétricas. Si se considera un sistema escalar de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \delta \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.24}$$

Donde  $\delta$  corresponde a un vector de perturbaciones asociadas a la variación de los parámetros de la planta y  $\eta$  las perturbaciones externas. El vector  $\delta$  en el caso general puede escribirse como:

$$\delta = g(x)\mu(x) + \eta(x)\tag{2.25}$$

Donde  $g(x)\mu(x)$  corresponde a las perturbaciones colineales de  $g(x)u$  y  $\eta(x)$  corresponde a las variaciones ortogonales a gradiente de la superficie de conmutación. Planteando las condiciones de invarianza:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x) &= \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u'_{eq} + \nabla\sigma(x) \cdot \delta \\ \dot{\sigma}(x) &= \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u'_{eq} + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)\mu(x) + \nabla\sigma(x) \cdot \eta(x) \\ \nabla\sigma(x) \cdot \eta(x) &= 0 \\ \dot{\sigma}(x) &= \nabla\sigma(x) \cdot f(x) + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)u'_{eq} + \nabla\sigma(x) \cdot g(x)\mu(x) = 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

$$u'_{eq} = -\frac{\nabla\sigma(x) \cdot f(x)}{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)} - \frac{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)\mu(x)}{\nabla\sigma(x) \cdot g(x)} = u_{eq} - \mu(x)$$

El control equivalente en régimen deslizante del sistema con perturbaciones es igual al control equivalente del sistema sin perturbaciones menos la componente colineal de la perturbación. Analizando la dinámica de deslizamiento ideal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u'_{eq} + \delta \\ \dot{x} &= f(x) + g(x)(u_{eq} - \mu(x)) + g(x)\mu(x) + \eta(x) \\ \dot{x} &= f(x) + g(x)u_{eq} + \eta(x)\end{aligned}\tag{2.27}$$

Las perturbaciones ortogonales al gradiente de la variedad afectan la dinámica ideal del modo deslizante, más no a la componente colineal a  $g(x)u(x)$ .

De esto se puede concluir que si la perturbación del sistema es colineal a  $g(x)u$ , es decir  $\delta = g(x)\mu(x)$ , la dinámica ideal es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es fuerte. Mientras que si la perturbación del sistema no es colineal a  $g(x)u$ , es decir  $\delta = \eta(x)$ , la dinámica ideal no es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es débil.



## 2.3. Elección del plano deslizante

El desarrollo de la técnica de control por planos deslizantes requiere de la elección de una superficie deslizante, la cual permitirá que el sistema evolucione hacia un valor de referencia específico. Varios autores han planteado diferentes superficies que logran el objetivo de control. Utkin la define como una combinación lineal de las variables de estado [5]:

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad c_n = 1 \quad (2.28)$$

Slotine plantea la superficie en función del error de seguimiento y sus derivadas [6]:

$$\sigma(x) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e \quad (2.29)$$

O también utilizando la integral del error de seguimiento, también conocida como control integral.

$$\sigma(x) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int e(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

Donde  $n$  es el orden del sistema modelado a controlar, y  $e$  puede ser definido como:

$$e(t) = y(t) - r \quad e(t) = r - y(t)$$

Para cada uno de los planos mostrados se relacionan las ventajas de cada una de las acciones de control utilizadas, como rápida respuesta (acción proporcional), estabilidad (acción derivativa) y ausencia de error en estado estable (acción integral), sin olvidar la función discontinua presente en el control.

## 2.4. Inconvenientes

La técnica de control por planos deslizantes, como un sistema de estructura variable, utiliza una lógica de conmutación que permite un comportamiento deseado. Esto se logra a partir de la función discontinua planteada, que asegura un régimen deslizante sobre el plano. Cuando se alcanza el plano deslizante, se requiere una frecuencia infinita de cambios en esa función discontinua para permanecer en la superficie; este comportamiento se conoce como *chattering*, y está relacionado con el dispositivo físico encargado de generar la función discontinua del control.

Existen diversos métodos para reducir este comportamiento sin modificar el régimen deslizante, entre ellos está en reemplazar la función discontinua  $\text{sign}(\sigma(x))$  por una función de saturación, la cuál permite que sobre el plano deslizante  $\sigma(x)$ , los valores de amplitud de la función discontinua sean cercanos a cero.

$$\text{sat}(x) = \frac{\tanh(x)}{|x| + \delta} \quad (2.31)$$

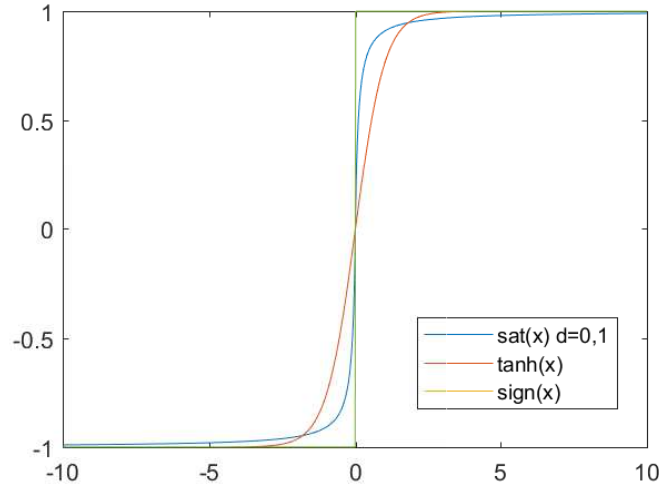


Figura 2.7: Funciones  $\text{sat}(x)$ ,  $\tanh(x)$  y  $\text{sign}(x)$

Estas funciones de saturación pueden ser la tangente hiperbólica o la función saturación, la cual depende de un parámetro  $\delta$  que ajusta el parecido con la función signo. En la figura 2.7 se puede observar la forma de cada una de las funciones mencionadas [7].

## 2.5. Descripción para sistemas multivariables

Considere un sistema multivariable, invariante con el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i = f(x) + G\mathbf{u} \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.32}$$

Donde  $f$  y  $g_i$  son campos vectoriales. Existen entonces  $m$  superficies de deslizamiento, cuya intersección describe el modo deslizante.

$$S = \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n : \sigma_i(x) = 0\}\tag{2.33}$$

Además también de  $m$  señales de control

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } \sigma_i(x) < 0 \end{cases}\tag{2.34}$$

Se puede entonces describir el régimen de deslizamiento a través del control equivalente

$$\sigma(x) = 0 \quad \dot{\sigma}(x) = \nabla\sigma(x) f(x) + \nabla\sigma(x) G\mathbf{u}_{\text{eq}}\tag{2.35}$$

Donde  $\nabla\sigma(x)$  es una matriz con número de filas igual al número de superficies de deslizamiento y columnas iguales al número de variables de estado.

$$\mathbf{u}_{\text{eq}} = -(\nabla\sigma(x) \ G)^{-1} (\nabla\sigma(x) \ f(x)) \quad (2.36)$$

Cumpliendo además con la condición de transversalidad, ya no como el producto escalar, sino como el determinante de la matriz definida por  $\nabla\sigma(x)$  y  $G$ .

$$\det(\nabla\sigma(x) \ G) \neq 0 \quad (2.37)$$

Encontrando también la dinámica de deslizamiento ideal.

$$\dot{x} = f(x) + G\mathbf{u}_{\text{eq}} = \left(I - G(\nabla\sigma(x) \ G)^{-1} \nabla\sigma(x)\right) f(x) \quad (2.38)$$

## Capítulo 3

# Diseño del controlador por planos deslizantes

En el diseño del controlador por planos deslizantes se debe tener el sistema descrito en variables de estado, además de identificar el plano o superficie deslizante a emplear; ya que este permite mejorar el comportamiento de la dinámica de deslizamiento de las variables de estado ante perturbaciones. Se describirá el diseño del controlador en sistemas escalares y luego se extenderá a sistemas multivariables.

### 3.1. Sistemas escalares

Un sistema escalar, es aquel que tiene una sola entrada y una sola salida. Este puede ser descrito mediante su ecuación diferencial, ecuaciones de estado o su función de transferencia.

Por ejemplo, el integrador doble es un sistema escalar, que puede ser descrito así:

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u(t)$$

Ecuaciones de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

Función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Para un sistema escalar de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + a_2 \frac{dw}{dt} + a_1 w = bu \quad (3.1)$$

Cuya salida es  $w$ , se obtiene un sistema de ecuaciones de estado así:

$$\begin{aligned} x_1 &= w & x_2 &= \frac{dw}{dt} & \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = \frac{dw}{dt} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{d^2w}{dt^2} = bu - a_1w - a_2\frac{dw}{dt} = b_1u - a_1x_1 - a_2x_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para un sistema de  $n$ -ésimo orden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (3.4)$$

Con las condiciones de transversalidad, el control equivalente y la dinámica de deslizamiento ideal se encuentran las constantes del plano deslizando para el diseño del controlador. Al considerar la acción integral, se calcula directamente la derivada de la superficie deslizando con respecto al tiempo y aplicando la condición de invarianza se calcula el control equivalente y la dinámica de deslizamiento ideal para hallar las constantes del plano. Se ilustrará el diseño del controlador por plano deslizando para el siguiente problema [8].

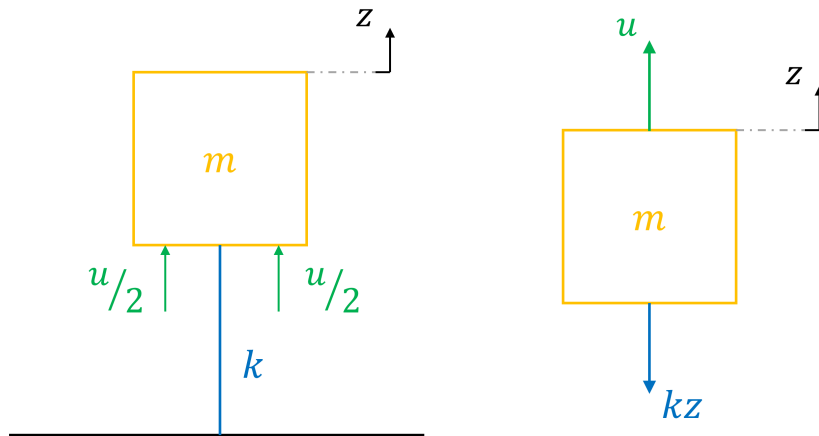


Figura 3.1: Sistema telescópico

El telescopio para seguir estrellas y asteroides del transbordador espacial (ver Figura 3.1 se puede modelar como una masa de 100  $kg$ . Está suspendido por medio de actuadores magnéticos

que producen una fuerza  $u(t)$ . El cable que le suministra energía eléctrica se modela como un resorte con una constante de  $1 \text{ N/m}$ . Diseñe un control por plano deslizante para controlar la posición del telescopio, teniendo en cuenta la superficie deslizante 2.29 y una señal con poco sobrepaso. Considere la señal referencia de tipo escalón.

Primero se plantea el sistema de ecuaciones de estado, aplicando la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= u - kz & \ddot{z} &= \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}z \\ x_1 &= z & x_2 &= \dot{z} & \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}u - \frac{k}{m}x_1 \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Desarrollando la superficie deslizante a usar.

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) e & e &= r - y & \sigma(x) &= \frac{d(r - y)}{dt} + \lambda(r - y) \\ y &= x_1 & \sigma(x) &= -x_2 + \lambda r - \lambda x_1 \end{aligned}$$

Condición de transversalidad:

$$\nabla \sigma(x) \cdot g(x) < 0 \quad \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} < 0 \quad -\frac{1}{m} < 0$$

Control equivalente:

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{\nabla \sigma(x) \cdot f(x)}{\nabla \sigma(x) \cdot g(x)} \\ u_{eq} &= -\frac{\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}} = -\frac{-\lambda x_2 + \frac{k}{m}x_1}{-\frac{1}{m}} = -m\lambda x_2 + kx_1 \end{aligned}$$

Dinámica de deslizamiento ideal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left( I - g(x) (\nabla \sigma(x) \cdot g(x))^{-1} \nabla \sigma(x) \right) f(x) \\ \dot{x} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \left( -\frac{1}{m} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{m} & -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix} \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Se puede notar que la dinámica en modo deslizante no depende de los parámetros de la planta. Obteniendo los valores propios de este sistema:

$$\det(\beta I - A) = \det\left(\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \beta & -1 \\ 0 & \beta + \lambda \end{vmatrix} = \beta(\beta + \lambda) = 0$$

$$\beta = 0 \quad \beta = -\lambda$$

El valor propio cero no implica que la dinámica del sistema sea inestable, implica que redujo el orden del sistema. También esta dinámica indica como debe de ser el valor de  $\lambda$  para que alcanzada la superficie de conmutación, el sistema se mantenga en ella, complementando la condición de transversalidad. Ahora como implementar la ley de control con los conceptos antes mencionados. En principio la ley de control depende del signo de la superficie de conmutación, por lo que sus valores asociados pueden ser una ganancia cuyo signo depende del signo del plano.

$$u = k_u \text{sign}(\sigma(x)) \quad u = \begin{cases} k_u & \text{si } \sigma(x) > 0 \\ -k_u & \text{si } \sigma(x) < 0 \end{cases}$$

El valor de la ganancia debe ser lo suficientemente grande para llevar en el menor tiempo posible, las variables de estado del sistema a la función de conmutación. Pero no debe olvidarse que la señal de control, representa una variable física del sistema que se requiere para su control, por lo que su valor debe estar relacionado con el elemento físico que la genera. Para el ejemplo, la señal de control del sistema es una fuerza, por lo que un valor demasiado grande como ganancia de control es un valor que debe ser garantizado por el elemento físico y puede no mejorar el resultado obtenido, y un valor no tan grande puede no ser suficiente para cumplir las especificaciones de control. Para este ejemplo se escogió un valor de ganancia  $k_u = 100$ , con el que se obtiene un muy buen resultado.

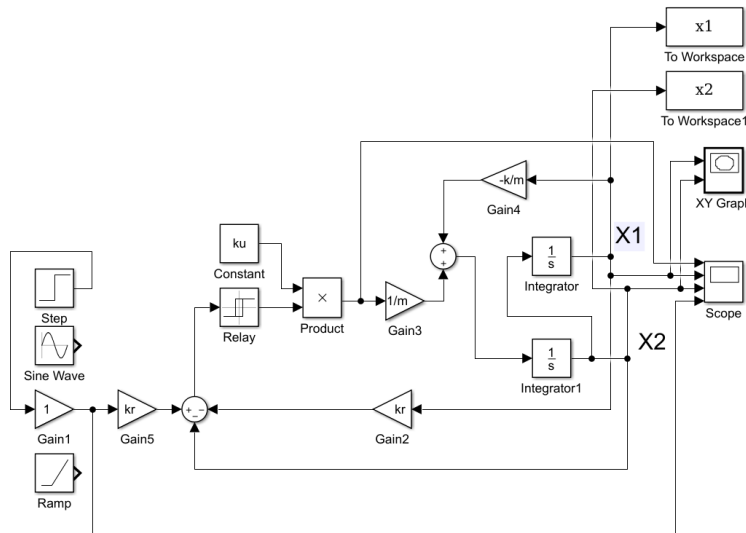
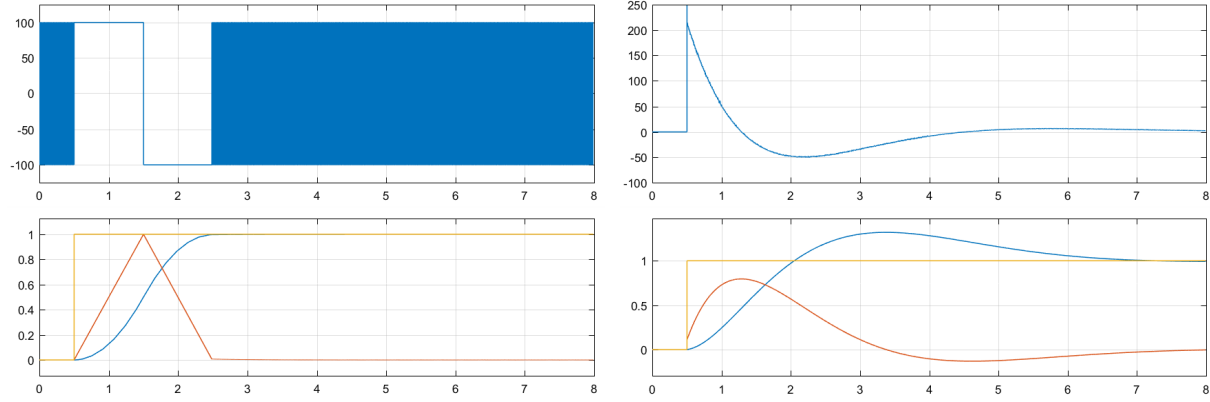


Figura 3.2: Sistema telescopio usando Simulink

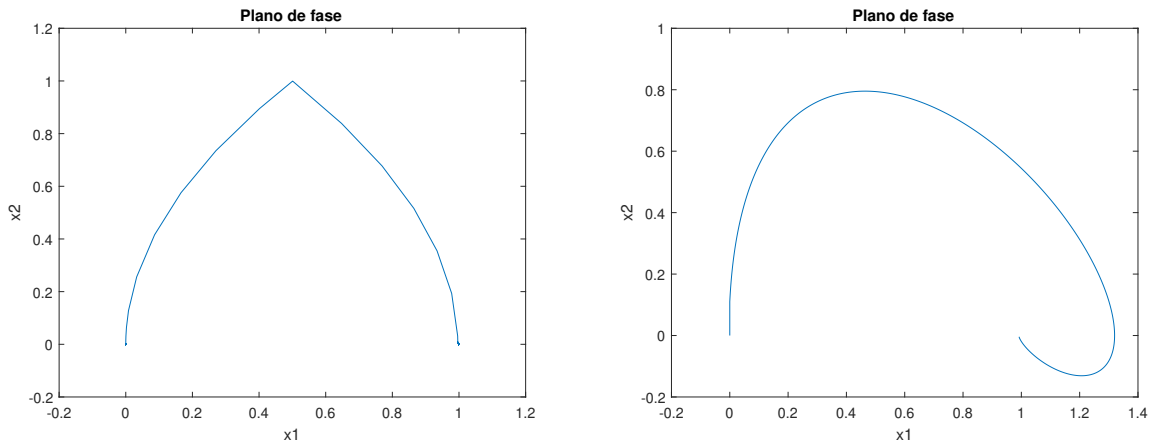
El valor de  $\lambda$  debe ser mayor que cero y lo suficiente grande para que la dinámica de deslizamiento sea la más rápida posible. Si es un valor pequeño, el tiempo de establecimiento es grande y si es muy grande el tiempo de establecimiento crece de nuevo pero existiendo un sobrepaso en la señal de salida. Para la ganancia de control establecida, se escoge un valor de  $\lambda = 2$ .



(a) Señal de control y respuesta del controlador por planos deslizantes del sistema telescopio ante una señal de referencia de  $r(t) = 1$  (b) Señal de control y respuesta del controlador PID del sistema telescopio ante una señal de referencia de  $r(t) = 1$

Figura 3.3: Respuesta y señal de control sistema telescopio

El control diseñado se simula, utilizando la herramienta Simulink de ©MATLAB (ver Figura 3.2), empleando la función relay con un delta de 0,002 debido a que al usar la función signo, ésta presenta problemas. Además se tiene un diseño PID con una buena respuesta subamortiguada, utilizada para comparar la respuesta obtenida por la técnica de planos deslizantes, que no presenta ningún sobrepaso.



(a) Plano de fase del sistema telescopio con el controlador por plano deslizante (b) Plano de fase del sistema telescopio con el controlador PID

Figura 3.4: Planos de fase del sistema telescopio



Se puede observar que mientras con el control PID se obtiene un tiempo de establecimiento de 7 segundos, con el control por planos deslizantes se obtiene un tiempo de 3 segundos (ver Figura 3.3). Los valores de las variables de estado (que en este caso representan variables físicas) toman valores reales posibles. Además de esto, al comparar las variables de control, con la técnica de planos deslizantes el valor máximo es menor que el del controlador PID. También se puede observar los planos de fase correspondientes al control por plano deslizante y al control PID. Observe en la Figura 3.4 la dinámica para los planos deslizantes y la dinámica para el control PID.

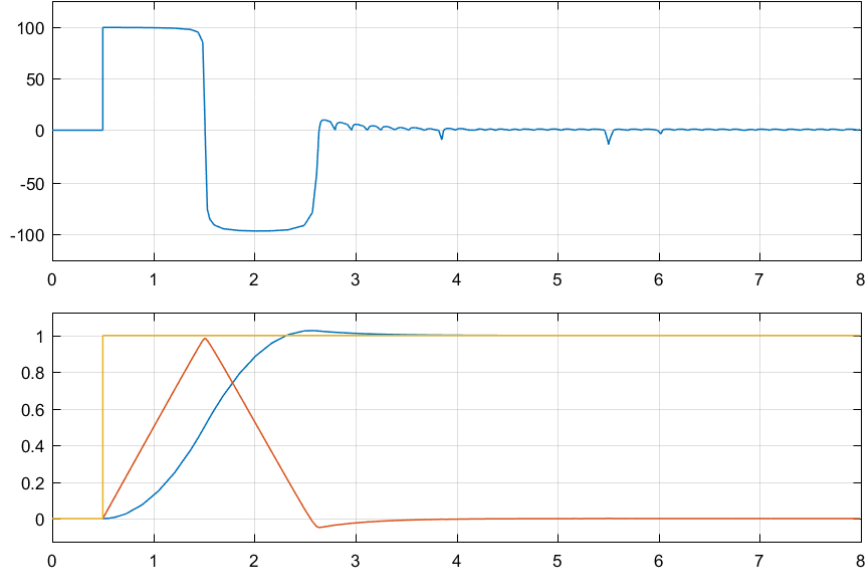


Figura 3.5: Señal de control y respuesta del sistema telescopio con disminución del *chattering*

Para solucionar el inconveniente del *chattering*, se modifica la función de control, del tal manera que cuando se acerque a los límites de la superficie de conmutación, la constante de la señal de control sea menor a la especificada. Para esto se emplea la función saturación:

$$u = k_u \text{sat}(\sigma(x)) = k_u \frac{\sigma(x)}{|\sigma(x)| + \delta} \quad (3.5)$$

Donde  $\delta$  es un valor lo suficientemente pequeño para aproximar la función signo. Esta función puede reducir la respuesta del modo deslizante, por lo que el régimen deslizante con esta función de control se conoce como cuasi-deslizante. Para este caso, con un valor de  $\delta$  de 0,01 se obtuvo una respuesta similar a la obtenida con la función signo, con un pequeño sobrepaso, observando notablemente la mejoría en la señal de control (ver Figura 3.5).

Si se toma en cuenta el cambio del valor de referencia, como este afecta directamente el plano deslizante, su dinámica también varía, esto no es conveniente debido a que aunque la señal de referencia se considera constante (tipo escalón), esta puede variar en su amplitud, por lo que se requiere de otra definición de plano deslizante para evitar este problema (ver Figura 3.6).

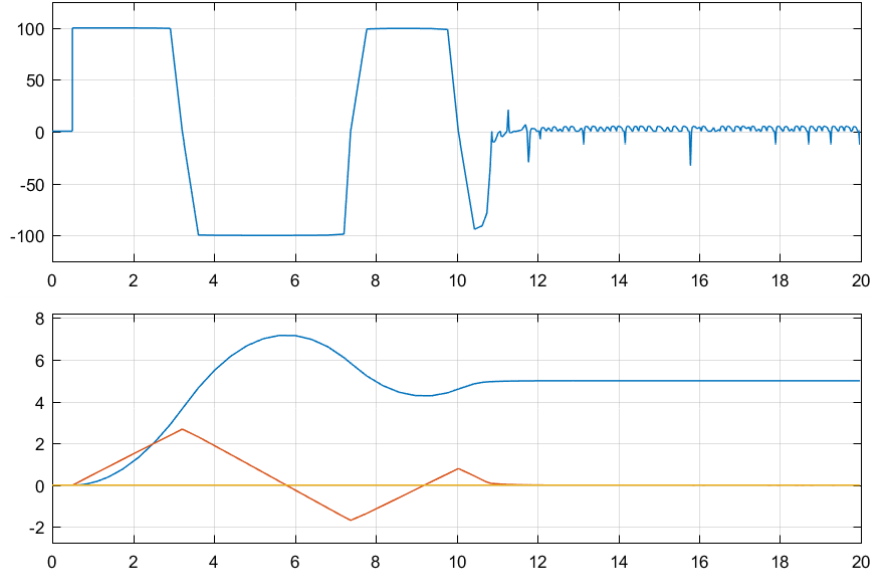


Figura 3.6: Señal de control y respuesta del sistema telescopio ante una señal de referencia de  $r(t) > 1$

Ahora, utilizando el plano deslizante descrito en 2.30:

$$\sigma(x) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \int e(\tau) d\tau \quad e = y(t) - r \quad y = x_1$$

$$\sigma(x) = \frac{de(t)}{dt} + 2\lambda e(t) + \lambda^2 \int e(\tau) d\tau = \frac{dx_1}{dt} + 2\lambda(x_1 - r) + \lambda^2 \int (x_1 - r) d\tau$$

De 3.1 y aplicando la condición de invarianza:

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{d\sigma(x)}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx_1}{dt} + \lambda^2(x_1 - r) = 0$$

$$\dot{\sigma}(x) = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u_{eq} + 2\lambda x_2 + \lambda^2(x_1 - r) = 0$$

$$\frac{1}{m}u_{eq} = \frac{k}{m}x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda^2(x_1 - r)$$

$$u_{eq} = m \left( \frac{k}{m}x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda^2(x_1 - r) \right)$$

Reemplazando en 3.1, se obtiene la dinámica de deslizamiento ideal:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} m \left( \frac{k}{m}x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda^2(x_1 - r) \right)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{m}x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda^2(x_1 - r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2\lambda x_2 - \lambda^2(x_1 - r) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} r = A_{PD}x + B_{PD}r$$

Hallando el determinante de la función de transferencia en régimen deslizante:

$$\det(sI - A_{PD}) = \det\left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ \lambda^2 & s + 2\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(sI - A_{PD}) = s^2 + 2\lambda s + \lambda^2 = (s + \lambda)^2$$

Por lo que elegir el valor de  $\lambda$ , equivale a tener 2 polos iguales en la dinámica de deslizamiento ideal.

De la condición de invarianza:

$$\dot{\sigma}(x) = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u_{eq} + 2\lambda x_2 + \lambda^2(x_1 - r) = 0$$

Expresando la señal de control

$$u_{eq} = -m(k_a x_1 + k_b x_2 + k_c(x_1 - r))$$

$$\dot{\sigma}(x) = \left(-\frac{k}{m} - k_a\right)x_1 + (2\lambda - k_b)x_2 + (\lambda^2 - k_c)(x_1 - r)$$

Teniendo en cuenta la condición de alcanzabilidad

$$\sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0$$

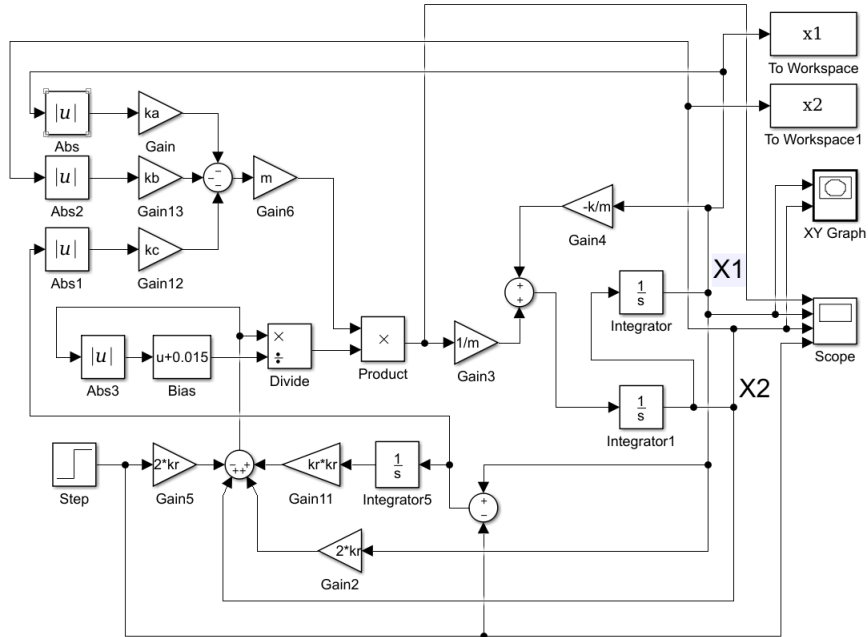


Figura 3.7: Sistema telescopio usando Simulink

Se define la señal de control, tal que si el plano deslizante es positivo, su derivada sea negativa y viceversa.

$$u = -m(k_a|x_1| + k_b|x_2| + k_c|x_1 - r|)\text{sign}(\sigma(x))$$

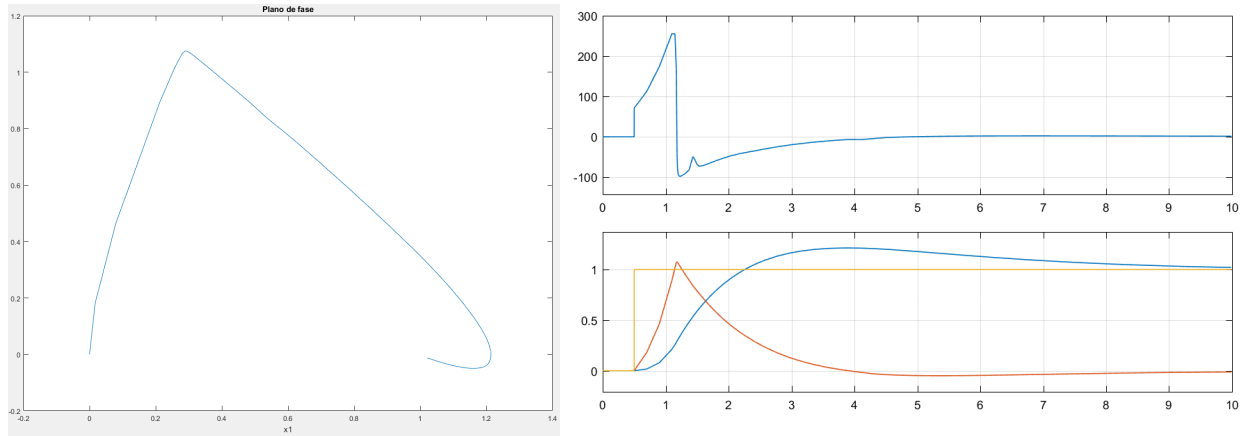
Para esto se debe cumplir que:

$$k_a > \frac{k}{m} \quad k_b > 2\lambda \quad k_c > \lambda^2$$

Estas constantes se escogen facilmente como multiplos del valor de referencia. Para este caso con  $\lambda = 0,6$ :

$$k_a = 2\frac{k}{m} = 0,02 \quad k_b = 4\lambda = 2,4 \quad k_c = 2\lambda^2 = 0,72$$

En la Figura 3.7 se puede ver el esquema del controlador y la planta implementado en Simulink de (c) Matlab, se aproximó la función signo con la función saturación. En la Figura 3.8(b) se puede observar la señal de control y la respuesta del sistema, la cual es un poco lenta para seguir la señal de entrada  $u(t)$ ; esto puede deberse a que el sistema telescopio tiene un valor grande de masa. En la Figura 3.8(a) se muestra el plano de fase del sistema.



(a) Plano de fase del sistema telescopio con la modificación del plano deslizante 2.29. (b) Señal de control y respuesta del sustema telescopio ante una señal de referencia  $r(t) = 1$  con el plano deslizante 2.29.

Figura 3.8: Planos de fase del sistema telescopio

También es posible diseñar el controlador teniendo la posibilidad de elegir 2 polos diferentes en la dinámica de deslizamiento ideal, considerando la superficie deslizante 2.30 así:

$$\sigma(x) = x_2 + \lambda_1(x_1 - r) + \lambda_2 \int (x_1 - r) d\tau$$

Por lo que la dinámica de deslizamiento ideal queda:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} r = A_{PD}x + B_{PD}r$$

Hallando el determinante de la función de transferencia en régimen deslizante

$$\det(sI - A_{PD}) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2 = (s + p_1)(s + p_2)$$

Definiendo la señal de control del caso anterior

$$u = -m(k_a|x_1| + k_b|x_2| + k_c|x_1 - r|)\text{sign}(\sigma(x))$$

Cumpliendo lo siguiente:

$$k_a > \frac{k}{m} \quad k_b > \lambda_1 \quad k_c > \lambda_2$$

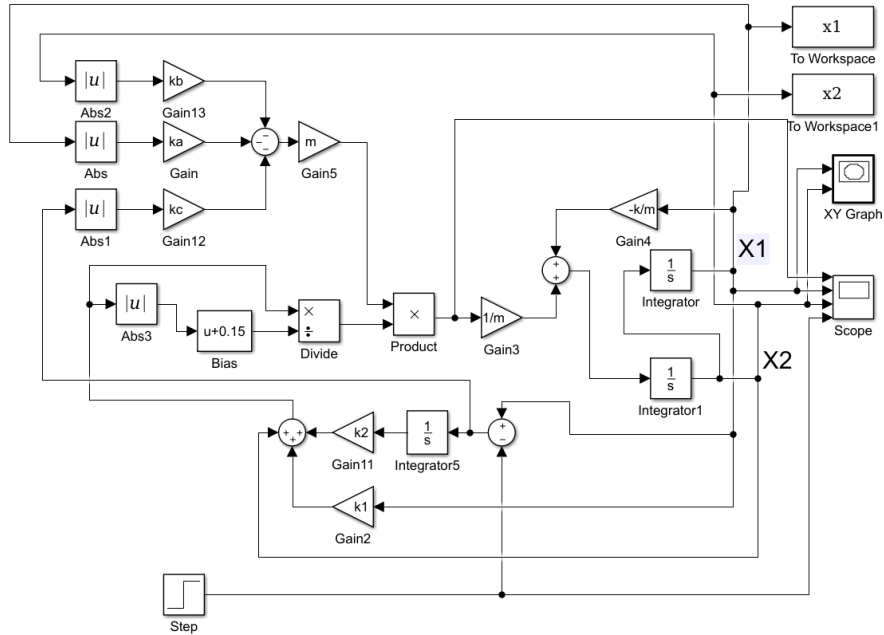


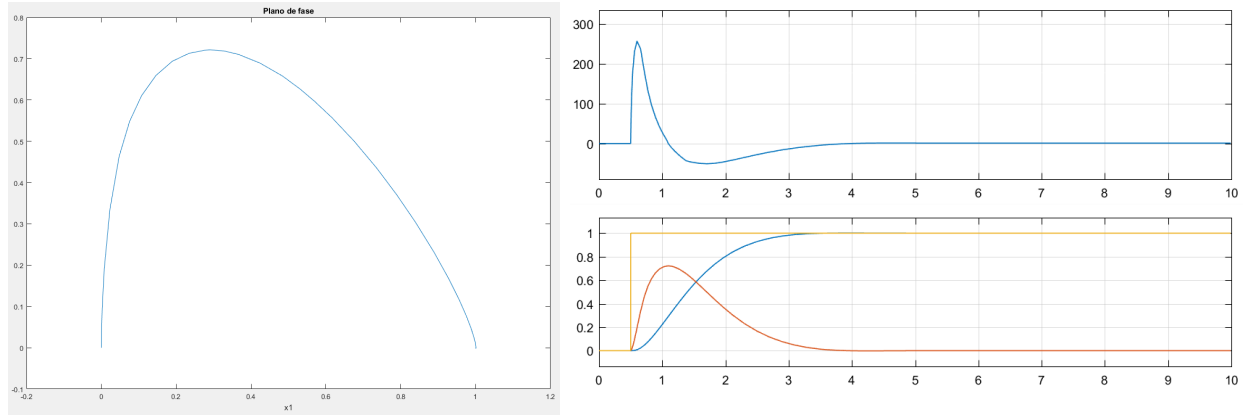
Figura 3.9: Sistema telescopio usando Simulink

Con valores de  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 3$ , los cuales corresponden a los polos  $p_1 = -1,5 + 0,866i$  y  $p_2 = -1,5 - 0,866i$ , se escogen las constantes en múltiplos de los valores de referencia, a excepción de  $k_a$  el cual se le da el valor de 1 (100 veces el valor de referencia).

$$k_a = 100 \frac{k}{m} = 1 \quad k_b = 2\lambda_1 = 6 \quad k_c = 2\lambda_2 = 6$$

En la Figura 3.9 se puede ver el esquema del controlador y la planta implementado en Simulink de (c) Matlab, se aproximó la función signo con la función saturación. En la Figura 3.10(b) se puede observar la señal de control y la respuesta del sistema, la cual es similar a la obtenida con la primer elección de plano deslizante. La diferencia radica en la capacidad de mantener la respuesta ante valor de la señal de referencia diferentes a uno. En la Figura 3.10(a) se muestra el plano de fase del sistema.

Para analizar la robustez ante perturbaciones se adicionan perturbaciones de tipo escalón en las variables de estado (externas), de 0,2, y a la señal de control  $u$  (colineal a  $g(x)u$ ), de  $-100$ .



(a) Plano de fase del sistema telescopio con la modificación del plano deslizante 2.29. (b) Señal de control y respuesta del sistema telescopio ante una señal de referencia  $r(t) = 1$  con la modificación del plano deslizante 2.29.

Figura 3.10: Plano de fase y señales de control y salida del sistema telescopio

A los 4 segundos de simulación se activa la perturbación para  $\dot{x}_1$ , luego 2 segundos después se activa la perturbación para  $\dot{x}_2$  y 2 segundos después la perturbación a la señal de control. En la Figura 3.11 se puede observar un muy pequeño transitorio en la señal de salida cuando se activa la primer perturbación, luego un transitorio pequeño con la segunda perturbación la cual desplaza la velocidad ( $x_2$ ), que corresponde a la señal azul, al valor de la perturbación y se observa un pico en la señal de control al activar la última perturbación sin afectar el control sobre la posición del telescopio ( $x_1$ ).

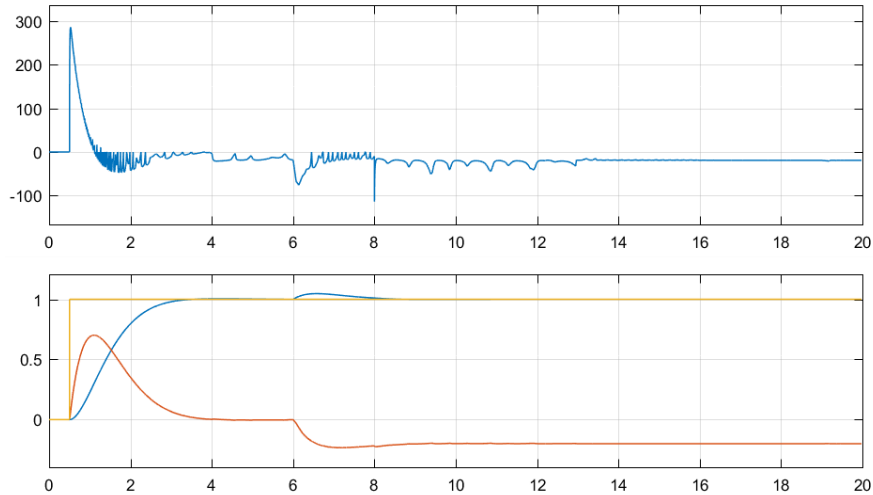


Figura 3.11: Señal de control y respuesta del sistema telescopio ante una señal de referencia  $r(t) = 1$  con perturbaciones.

## 3.2. Sistemas multivariables

Un sistema multivariable, es aquel que tiene más de una entrada y más de una salida. El sistema puede tener una entrada y más de una salida, más de una entrada y una salida o varias entradas y varias salidas. Estos sistemas son descritos a través de una matriz de transferencia que contiene las funciones de transferencia que relacionan cada entrada con cada salida [10].

En esta matriz de transferencia se puede observar que cambios ante una señal de entrada producen cambios en todas las salidas del sistema, por lo que el problema de diseño radica en controlar cada salida separadamente sin que se afecten las demás.

La acción integral en el plano deslizante ayuda a realizar esta separación, debido a que minimiza el error de seguimiento, siendo cero en el régimen de deslizamiento. Esta separación, la cual se consigue minimizando la interacción entre las señales de salida, permite que cada salida sea controlada independientemente [9].

Considere el sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{3.6}$$

Para minimizar la interacción entre las señales, la matriz de transferencia debe tener términos por fuera de su diagonal principal muy pequeños (matriz diagonal).

$$Y(s) = H(s)R(s) \quad H(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_{qq} \end{bmatrix}\tag{3.7}$$

Se definen entonces  $m$  planos deslizantes en función de las variables de estado y la acción integral del error de seguimiento.

$$\sigma(x) = K_a x + K_b \int (y - r) d\tau\tag{3.8}$$

De 3.6 y aplicando la condición de invarianza

$$\dot{\sigma}(x) = \frac{d\sigma(x)}{dt} = K_a \dot{x} + K_b (y - r) = 0\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x) &= K_a(Ax + Bu_{eq}) + K_b Cx - K_b r = (K_a A + K_b C)x + K_a B u_{eq} - K_b r \\ K_a B u_{eq} &= -(K_a A + K_b C)x + K_b r \\ u_{eq} &= -(K_a B)^{-1}(K_a A + K_b C)x + (K_a B)^{-1}K_b r\end{aligned}\tag{3.10}$$

Reemplazando en 3.6, se obtiene la dinámica de deslizamiento ideal.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B \left( -(K_a B)^{-1}(K_a A + K_b C)x + (K_a B)^{-1}K_b r \right) \\ \dot{x} &= Ax - B(K_a B)^{-1}(K_a A - K_b C)x + B(K_a B)^{-1}K_b r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left( A - B(K_a B)^{-1} (K_a A - K_b C) \right) x + B(K_a B)^{-1} K_b r = A_{PD} x + B_{PD} r \\
\dot{x} &= A_{PD} x + B_{PD} r \\
A_{PD} &= A - B(K_a B)^{-1} (K_a A - K_b C) \quad B_{PD} = B(K_a B)^{-1} K_b
\end{aligned} \tag{3.11}$$

La matriz de transferencia se obtiene entonces de la dinámica de deslizamiento ideal

$$\begin{aligned}
H(s) &= C (sI - A_{PD})^{-1} B_{PD} \\
H(s) &= C \left( sI - A + B(K_a B)^{-1} K_a A + B(K_a B)^{-1} K_b C \right)^{-1} B(K_a B)^{-1} K_b
\end{aligned}$$

Definiendo

$$K = B(K_a B)^{-1} K_b \tag{3.12}$$

La matriz de transferencia se puede hallar

$$H(s) = C \left( sI - A + B(K_a B)^{-1} K_a A + KC \right)^{-1} K \tag{3.13}$$

De 3.12, se obtiene una relación entre  $K_a$  y  $K_b$

$$B^{-1} K = (K_a B)^{-1} K_b \quad (K_a B)^{-1} K = K_b \quad K_a K = K_b \tag{3.14}$$

Se selecciona una matriz  $K_a$ , tal que  $\det(K_a B) \neq 0$ ; para luego, asumiendo  $K$  desconocida, se calcule  $H(s)$  para que el sistema sea estable y sus elementos fuera de la diagonal sean cero o lo suficientemente pequeños [7].

De 3.9 se tiene que:

$$\dot{\sigma}(x) = K_a A x + K_a B u_{eq} + K_b (y - r) = 0$$

Usando la señal de control

$$\begin{aligned}
u_{eq} &= -(K_a B)^{-1} (\Psi_a x + \Psi_b (y - r)) \\
\dot{\sigma}(x) &= (K_a A - \Psi_a) x + (K_b - \Psi_b) (y - r)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de alcanzabilidad

$$(\dot{\sigma}(x))_i (\sigma(x))_i < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Se define la señal de control; tal que si  $(\sigma(x))_i$  es positivo,  $(\dot{\sigma}(x))_i$  sea negativo y viceversa.

$$u = -(K_a B)^{-1} (\Psi_a |x| + \Psi_b |y - r|) \text{sign}(\sigma(x)) \tag{3.15}$$

Para esto se debe cumplir que:

$$(\Psi_a)_{ij} > |(K_a A)_{ij}| \quad (\Psi_b)_{ij} > |(K_b)_{ij}|$$

Se utilizará para esto un parámetro de ajuste  $k_u$ , tal que se cumpla la desigualdad anterior.

$$(\Psi_a)_{ij} = k_u |(K_a A)_{ij}| \quad (\Psi_b)_{ij} = k_u |(K_b)_{ij}| \tag{3.16}$$



Se mostrará el procedimiento de diseño con el siguiente ejemplo [11].

Se tiene un tanque agitador (ver Figura 3.12) de sección transversal  $A$ , el cual cuenta con 2 flujos de entrada  $F_1(t)$  y  $F_2(t)$  y 2 concentraciones  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente constantes, y un flujo saliente  $F(t)$  con una concentración  $c(t)$  igual a la concentración del tanque. Si el tanque es de un volumen de  $1 \text{ m}^3$  y posee un flujo de salida constante de  $0,02 \text{ m}^3/\text{s}$  a una concentración de  $1,25 \text{ kmol}/\text{m}^3$ ; diseñe un control por planos deslizantes para controlar variaciones en el flujo de salida y en la concentración de salida; si las concentraciones de entrada  $c_1$  y  $c_2$  son de  $1 \text{ kmol}/\text{m}^3$  y  $2 \text{ kmol}/\text{m}^3$  respectivamente; ubicando los polos del sistema en lazo cerrado en  $0,5$  y  $1$ .

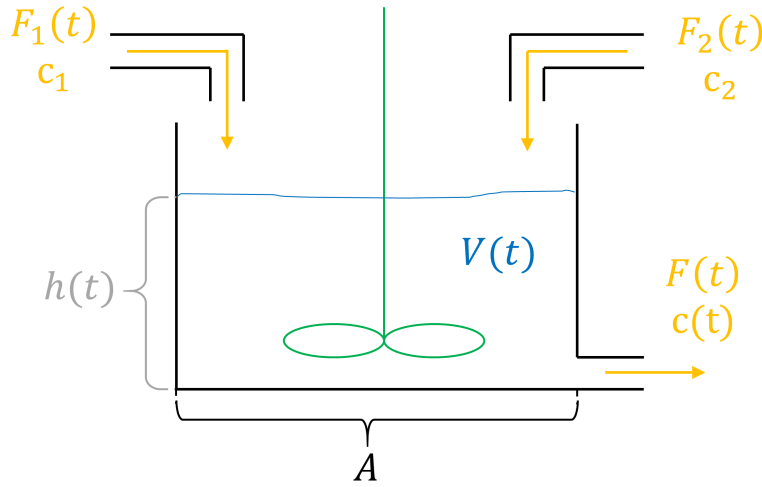


Figura 3.12: Tanque agitador

Primero se plantean las ecuaciones de balance de flujo y de balance de masa:

$$F_1(t) + F_2(t) - F(t) = \dot{V}(t)$$

$$c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) - c(t) F(t) = \frac{d}{dt} (c(t) V(t))$$

El caudal de salida  $F(t)$  se expresa en función del volumen del tanque y su área transversal

$$F(t) = k \sqrt{\frac{V(t)}{A}}$$

Linealizando el sistema alrededor de un punto de operación, se tiene que

$$\Delta F_1(t) + \Delta F_2(t) - \frac{F_o}{2V_o} \Delta V(t) = \Delta \dot{V}(t)$$

$$c_1 \Delta F_1(t) + c_2 \Delta F_2(t) - c_o \frac{F_o}{2V_o} \Delta V(t) - F_o \Delta c(t) = c_o \Delta \dot{V}(t) + V_o \Delta \dot{c}(t)$$

Escogiendo como variables de estado  $x_1 = \Delta V(t)$  y  $x_2 = \Delta c(t)$ , el sistema de ecuaciones de estado es:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -\frac{F_o}{2V_o} & 0 \\ 0 & -\frac{F_o}{V_o} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c_1-c_o}{V_o} & \frac{c_2-c_o}{V_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_1(t) \\ \Delta F_2(t) \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} \frac{F_o}{2V_o} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el punto de operación dado y definiendo las salidas  $y_1 = \Delta F(t)$  y  $y_2 = \Delta c(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_1(t) \\ \Delta F_2(t) \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

El diseño del controlador parte de seleccionar una matriz  $K_a$ , tal que  $\det(K_a B) \neq 0$ , para hallar la matriz  $K$  que haga de la matriz de transferencia en lazo cerrado una matriz diagonal.

Eligiendo  $K_a$ :

$$K_a = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Hallando la matriz de transferencia:

$$H(s) = C (sI - A + B(K_a B)^{-1} K_a A + KC)^{-1} K$$

Dado que  $B(K_a B)^{-1} K_a = I$

$$H(s) = C (sI + KC)^{-1} K = C \frac{\text{adj}(sI + KC)^T}{\det(sI + KC)} K$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s + 0,01K_{11} & K_{12} \\ 0,01K_{21} & s + K_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det(sI + KC) = s^2 + (0,01K_{11} + K_{22})s + 0,01(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21})$$

$$H(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + K_{22} & -K_{12} \\ -0,01K_{21} & s + 0,01K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0,01(s + K_{22}) & -0,01K_{12} \\ -0,01K_{21} & s + 0,01K_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0,01K_{11}(s + K_{22}) - 0,01K_{12}K_{21} & 0,01K_{12}s \\ K_{21}s & K_{22}(s + 0,01K_{11}) - 0,01K_{12}K_{21} \end{bmatrix}$$

Con el fin de separar los lazos de control, se hace diagonal la matriz de transferencia, eligiendo a  $K_{12} = K_{21} = 0$

$$H(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0,01K_{11}(s + K_{22}) - 0,01K_{12}K_{21} & 0 \\ 0 & K_{22}(s + 0,01K_{11}) - 0,01K_{12}K_{21} \end{bmatrix}$$

Por lo que el determinante de la matriz ( $\Delta$ ) queda:

$$\Delta = \det(sI + KC) = s^2 + (0,01K_{11} + K_{22})s + 0,01K_{11}K_{22}$$

Ubicando los polos en  $-0,5$  y  $-1$ , se tiene:

$$s^2 + 1,5s + 0,5 = s^2 + (0,01K_{11} + K_{22})s + 0,01K_{11}K_{22}$$

$$0,01K_{11} + K_{22} = 1,5$$

$$0,01K_{11}K_{22} = 0,5$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tienen 2 soluciones:

$$\text{Solución 1 : } K_{11} = 50 \quad K_{22} = 1$$

$$\text{Solución 2 : } K_{11} = 100 \quad K_{22} = 0,5$$

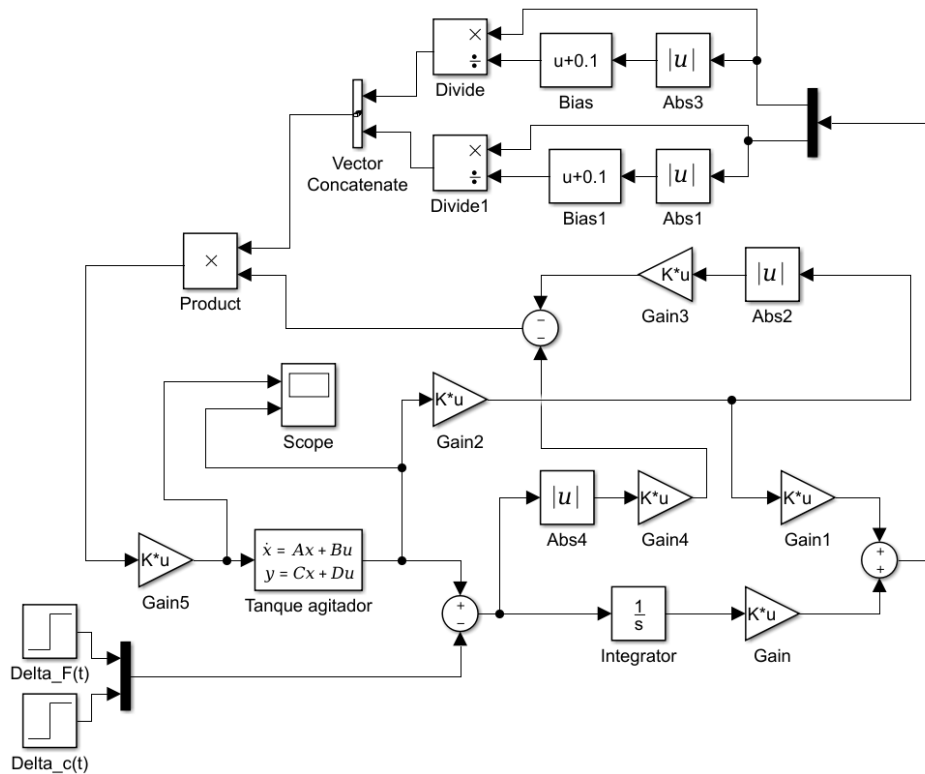


Figura 3.13: Tanque agitador usando Simulink

Tomando la primera solución, se calcula  $K$ ,  $K_b$  y  $K_a A$ :

$$K = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_b = K_a K = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0,2 \\ 10 & 0,4 \end{bmatrix}$$

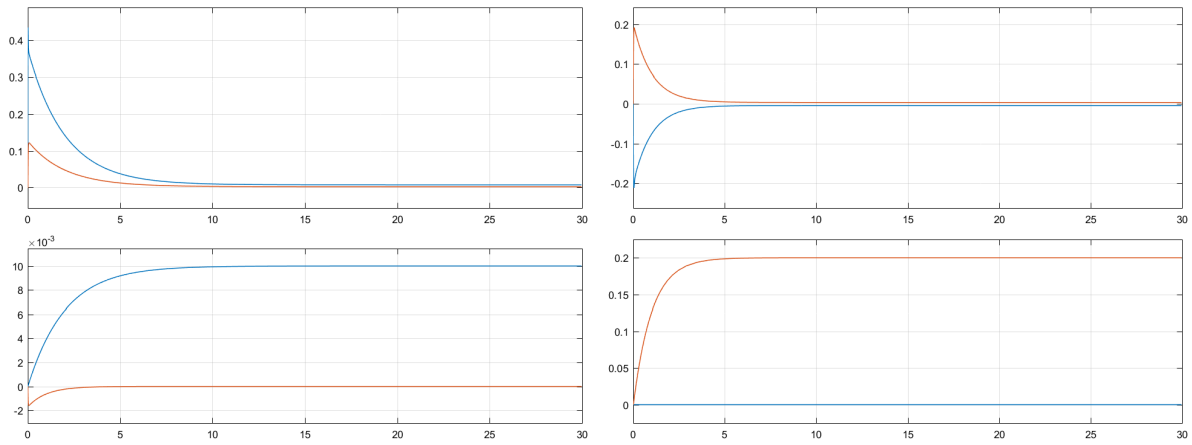
$$K_a A \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,004 & -0,004 \\ -0,002 & -0,008 \end{bmatrix}$$

Como cada posición de  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$  debe ser positiva y mayor al valor absoluto de cada posición de  $K_a A$  y  $K_b$  respectivamente, se escoge una constante  $k_u = 100$ . Con esto queda listo el diseño del controlador.

$$(\Psi_a)_{ij} = k_u |(K_a A)_{ij}| \quad (\Psi_b)_{ij} = k_u |(K_b)_{ij}|$$

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \quad \Psi_b = \begin{bmatrix} 2000 & 20 \\ 1000 & 40 \end{bmatrix}$$

En la Figura 3.13, se puede ver el diagrama de bloques en Simulink del control multivariable diseñado.



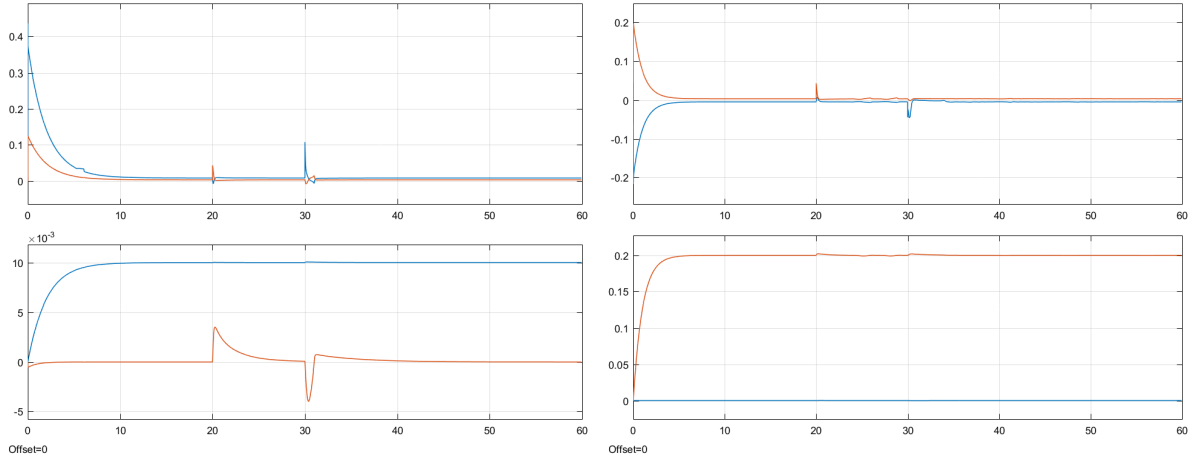
(a) Señales de control y respuestas del tanque agi- (b) Señales de control y respuestas del tanque agi-  
tador ante una señal de referencia de  $\Delta F(t) = 0,01$  tador ante una señal de referencia de  $\Delta F(t) = 0$  y  
y  $\Delta c(t) = 0$ .  $\Delta c(t) = 0,2$ .

Figura 3.14: Respuestas del tanque agitador ante diferentes señales de referencia

Para comprobar su funcionamiento se prueba independiente las señales de control. En la Figura 3.14(a) se muestran las señales de control y las respuestas para la señal de referencia  $\Delta F(t)$ ; en la cual la señal azul, correspondiente al flujo de salida, sigue correctamente el comando de entrada, y la señal roja, correspondiente a la concentración de salida, tiene un pequeño transitorio. Este transitorio no es comparable con el nivel de concentración de salida en el punto de operación (menor a  $0,002 \text{ kmol/m}^3$ ); además de que al alcanzar el flujo de salida el valor de referencia, la concentración de salida regresa al valor del punto de operación.

En la Figura 3.14(b) se muestran las señales de control y las respuestas para la señal de referencia  $\Delta c(t)$ ; donde señal roja, correspondiente a la concentración de salida, sigue correctamente su referencia, y la señal azul, correspondiente al flujo de salida, no se mueve de su valor del punto de operación. En este caso variaciones de la concentración de salida no influyen en variaciones del flujo de salida.

Para analizar la robustez ante perturbaciones, con una constante  $k_u = 300$ , se adicionan perturbaciones de tipo escalón a las señales de control  $u_1$  y  $u_2$  para las señales de referencia independientes. A los 20 segundos de simulación se activa la perturbación para la segunda señal de control y a los 10 segundos después la perturbación para la primer señal de control



(a) Señales de control y respuestas del tanque agitador ante una señal de referencia de  $\Delta F(t) = 0,01$  y  $\Delta c(t) = 0$  con perturbaciones. (b) Señales de control y respuestas del tanque agitador ante una señal de referencia de  $\Delta F(t) = 0$  y  $\Delta c(t) = 0,2$  con perturbaciones.

Figura 3.15: Respuestas del tanque agitador ante diferentes señales de referencia y perturbaciones

En la Figura 3.15(a) se muestran las señales de control y las respuestas para la señal de referencia  $\Delta F(t)$ ; con perturbaciones en la señal de control de 0,03 y 0,1 respectivamente. La señal azul, correspondiente al flujo de salida, sigue correctamente el comando de entrada a pesar de las perturbaciones, y la señal roja, correspondiente a la concentración de salida, tiene un transitorio de igual tamaño a la señal de referencia. Este transitorio, aunque comparable con el flujo de salida, no es comparable con la magnitud de la concentración de salida (menor a  $0,005 \text{ kmol/m}^3$ ); además de que la concentración de salida alcanza su valor del punto de operación 20 segundos después de la segunda perturbación.

En la Figura 3.15(b) se muestra las señales de control y las respuestas para la señal de referencia  $\Delta c(t)$ ; con perturbaciones en la señal de control de 0,04 y  $-0,04$  respectivamente. La señal roja, correspondiente a la concentración de salida, sigue correctamente el comando de entrada a pesar de las perturbaciones, y la señal azul, correspondiente al flujo de salida, no se mueve de su valor del punto de operación.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Mediante el uso de la geometría diferencial se enfoca la descripción de la técnica de planos deslizantes, mostrando la manera en que funciona la técnica y como el controlador diseñado logra el objetivo de control.

La elección del plano deslizante, permite cumplir el objetivo de control, además de definir adicionalmente un comportamiento frente a perturbaciones externas o en la señal de control más robusto.

La dificultad de la técnica de control conocida como *chattering* se disminuye de manera efectiva, reemplazando la función discontinua de control  $\text{sign}(x)$  por una función suave alrededor de cero, como las funciones definidas en 2.31; donde el esfuerzo de control no debe ser el mismo, debido a que el sistema se encuentra en el plano deslizante.

La técnica de control por planos deslizantes, basada en los sistemas de estructura variable, puede ser implementada para sistemas escalares y multivariantes, obteniendo excelentes resultados ante perturbaciones externas, debido a que en el diseño del controlador, los valores de las ganancias se escogen independientemente de los parámetros de la planta. En el proceso de diseño implementado, el valor de las ganancias se escogió teniendo en cuenta unas constantes que pueden estar relacionadas con los parámetros de la planta; por lo que estos valores escogidos garantizan una robustez ante perturbaciones acotadas en un rango específico.

La principal dificultad del diseño del controlador en sistemas multivariantes es el acoplamiento de las señales de salida a controlar; la técnica de control por planos deslizantes soluciona esta dificultad, debido a que en la dinámica de deslizamiento logra desacoplar cada una de las salidas, controlándolas de manera individual, como lazos independientes, con cada señal de referencia.

# Capítulo 5

## Bibliografía

- [1] C. A. Evangelista, “Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden. Aplicación a la energía eólica”, tesis para doctorado en ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2012.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, J. C. Hung, “Variable Structure Control: A Survey”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, feb. 1993.
- [3] F. Garelli, “Sistemas de estructura variable. Aplicación al control con restricciones”, tesis para doctorado en ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2007.
- [4] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, A. Levant, “Introduction: Intuitive Theory of Sliding Mode Control” en *Sliding mode Control and Observation*, Ed. Birkhäuser, 2014.
- [5] V. I. Utkin “Variable Structure Systems with Sliding Modes”, *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. 22, no. 2, abr. 1977.
- [6] J. E. Slotine y W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey, United States: Prentice Hall, 1991.
- [7] D. Giraldo B. e I. Tabares G “Control design of a multiple input multiple output system using sliding planes approach”, *IPSE/IEEE International Conference on CAD/CAM, Robotics, and Factories of the Future* vol. 2, no. 1, ag. 1999.
- [8] D. Giraldo B. e I. Tabares G, *Teoría de control*. Pereira, Risaralda, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 1997.
- [9] V. I. Utkin, *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Moscow, USSR, 1978.
- [10] T. Kailat, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey, United States: Prentice Hall, 1980.
- [11] H. Kwakernaak. y R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. Canada, 1972.